# 1 Osnovne operacije sa matricama

Neka su date matrice A i B, istih dimenzija: $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ i skalar $\lambda \neq 0$. Tada važi:

- $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{n\times m}$
- $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{n\times m}$

Da bi množenje matrica imalo smisla, broj kolona prve matrice mora biti jednak broju vrsta druge matrice!!! Množenje matrica NIJE KOMUTATIVNO, ali jeste asocijativno.[1]

Spomenimo jos neke od osnovnih pojmova u oblasti matrica:

- *transponovana* matrica matrice A, u oznaci $A^T$ je matrica čije su kolone vrste matrice A;
- *kvadratna* matrica ima jednak broj vrsta i kolona;
- *nula matrica* je matrica čiji su svi elementi nule;
- *jedinična matrica* je matrica koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a van nje nule; takva matrica predstavlja jedinicu u odnosu na operaciju množenja matrica;
- *dijagonalna matrica* je matrica koja sadrži nenula elemente samo na glavnoj dijagonali.

1. Date su matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
Izračunati $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ i $B \cdot A$, $(A + B)^T$.

2. Izračunati:

   a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. Izračunati $AB - BA$ ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. Ako je $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$, izračunati $P(A)$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dokazati da je $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Odrediti $n-$te stepene matrica

   a) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

   b) $B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

   c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[1] O množenju matrica pogledati skriptu profesora Dincica!

# 2 Determinante

Determinanta je definisana SAMO za kvadratne matrice! Pokazaćemo kako se računaju determinante za $n = 1, 2, 3$

- $|a_{11}| = a_{11}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$ - Sarusovo pravilo
- Ukoliko je matrica dijagonalna, njena determinanta jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali. Specijalno, $\det I_n = 1$

LAPLASOV RAZVOJ DETERMINANTE

U matrici $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ posmatrajmo element $a_{ij}$. Označimo sa $M_{ij}$ determinantu matrice koja je dobijena iz matrice $A$ izbacivanjem $i$-te vrste i $j$-te kolone. Takva determinanta naziva se *minor* elementa $a_{ij}$. Determinanta matrice $A$ se može razviti po $i$-toj vrsti:

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}.$$

Analogno, matrica se može razviti i po $j$-toj koloni.

OSOBINE DETERMINANTI

- $\det A = \det A^T$
- Ako dve vrste/kolone matrice zamene mesta, menja se znak determinante.
- Ako se svaki element jedne vrste/kolone pomnoži skalarom $\lambda \neq 0$, determinanta se množi istim skalarom.
- Vrednost determinante se ne menja ako se vrsta/kolona pomnoži skalarom $\lambda \neq 0$, a onda doda nekoj drugoj vrsti/koloni.

1. Izračunati determinante

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

2. Izračunati determinante

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$

# 3 Inverzna matrica

Matrica $A$ je *invertibilna* (regularna) ako postoji matrica $A^{-1}$, takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Kvadratna matrica je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

POSTUPAK DOBIJANJA INVERZNE MATRICE

Neka je $M_{ij}$ minor elementa $a_{ij}$ matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Algebarski kofaktor elementa $a_{ij}$ je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Adjungovana matrica matrice A, u oznaci

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & & & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

I konačno, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\text{adj}A$.

1. Odrediti $A^{-1}$ ako je

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Rešiti matrične jednačine po nepoznatoj matrici $X$

   $a)\ AX = B\ \ b)\ XA = B\ \ c)\ AX = BA^{-1}B\ \ d)\ AX - 2A = 2BX - B + I\ \ e)\ XA = BA^{-1}B\ \ f)\ AX^{-1} = A - X^{-1}B.$

   ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

# 4 Rang matrice

Rang se odredjuje svodjenjem matrice na stepenastu formu uz korišćenje elementarnih transformacija pri kojima se ne menja rang

- zamena mesta dvema vrstama/kolonama
- množenje vrste/kolone skalarom $\lambda \neq 0$
- dodavanje jedne vrste/kolone pomnožene skalarom nekoj drugoj vrsti/koloni

1. Odrediti rang matrice

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Odrediti rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. U zavisnosti od parametra $\lambda$ diskutovati rang matrice

$$a)\ A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad b)\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$